Управление образования администрации
Киренского муниципального района
Муниципальное казенное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 5 г. Киренска»

«ТАИНСТВЕННЫЙ МОДУЛЬ»

.

учитель математики МКОУ СОШ № 5 г. Киренска
Твердохлебова
Ирина Александровна

Киренск 2021

Введение.

Данная работа посвящена одной из самых сложных и многогранных тем в школьном курсе математике: модуль.

Модуль числа – это такая забавная концепция в математике, с пониманием которой у многих людей возникают трудности.

А между тем она очень проста.

На ЕГЭ и ОГЭ задания второй части содержат модули — это уравнения, неравенства, графики. Кроме того, задания с модулем часто встречаются на олимпиадах разного уровня.

В Программе основного общего образования по математике в разделе Арифметика в теме Рациональные числа коротко записано: Модуль (абсолютная величина) числа. Больше это понятие не упоминается ни в указанной программе, ни в Программе среднего (полного) образования.

Вводится понятие «модуль» в курсе математики 6 класса. В седьмом классе про модуль учащиеся забывают на целый год, по крайней мере, в учебнике это понятие уже не встречается. В последующих классах только в некоторых учебниках вводится повторно понятие модуля числа и модуля выражения, и проскакивают эпизодические простейшие задания с модулем, например, линейные уравнения с модулем, но и они приводятся изредка и бессистемно. В темах Решение линейных уравнений и неравенств, Решение квадратных уравнений и неравенств задания с модулем не рассматривается.

Можно сказать, что ситуация с изучением модуля в средней школе близка к катастрофической. После окончания как основной, так и средней школы учащимся предстоит пройти ГИА по математике, и там так же достаточно заданий части 2 ОГЭ и части С ЕГЭ встречаются задания с модулем самого разного вида, причем на таком уровне сложности, который и не мыслился ранее. И, в основном, различные преподаватели, онлайн-репетиторы, онлайн-школы, и так далее решают такие задания с помощью больших громоздких систем и совокупностей. Что выглядит достаточно страшно. И напрочь отталкивает детей от данной темы.

Сложность темы именно в этом огромном пробеле школьного образования: в теме Модуль практически отсутствует сердцевина, переход от простейших заданий к очень трудным. А ведь эти две вертикальные палочки фантастическим образом меняют любую функцию, любое уравнение или неравенство, делают их более сложными, но и более интересными. Это граничит с фокусом, когда, поставив модуль в квадратном уравнении, мы получаем у него уже не два, а четыре корня! И такие возможности не используются в практическом преподавании.

Первое знакомство с понятием модуля происходит в шестом классе; это наиболее оправдано с методической точки зрения, так как можно показать все наглядно. Наиболее универсальной является идея «узловой точки» Стараюсь на протяжении всего курса изучения математики с 6-го по 11-ый класс, использовать этот метод решения.

На первых порах обучения выявляю учащиеся, проявляющие интерес к математике, и с ними решаю наиболее трудные задачи учебника на занятиях кружка, консультации или на уроке. Углубление идет в среднем звене, за счет усложнения заданий, которые требуют комплексного применения различных способов решения.

В 5-6 классах отрабатываются навыки решения практически на каждом уроке. В более старших классах, сильные ученики решают как сложные задания по карточкам. А остальные учащиеся более простые, и различные примеры на вычисление с модулем.

В 7-ом классе, учащиеся достаточно хорошо владеющие навыками решения несложных заданий с модулем, постепенно углубляют знания выполняя дополнительные упражнения, содержащие модуль, в самостоятельных и контрольных работах.

В 8-х и 9-х классах самые сильные ученики выполняют задания, и предполагают несколько вариантов решений. После предложенные решения обсуждают и выбирают наиболее рациональные. Так развивая творческий потенциал учащихся.

В 10-11 классах, с углубленным изучением математики, занимаюсь на факультативных занятиях и дополнительно отрабатываю навыки решения сложных задач, содержащих модуль. Учащиеся уже владеют набором методов и способов решения и способны сами их реализовывать. Учитель на данном этапе в основном проводит индивидуальные консультации, а также помогает при решении заданий, которые учащиеся не могут решить, готовясь к сдаче ЕГЭ И ОГЭ.

Между тем в учебниках недостаточно материала, связанного с задачами с модулям по различным разделам математики.

Подборка заданий в моей работе копилось годами. Однажды я наткнулась в газете «математика», приложение к «1 сентября», на очень интересную статью. Очень интересным оказалось, изучение модуля через использование понятия «узловой точки».

И с тех пор я отказалась от решения уравнений и неравенств с модулем с помощью систем и совокупностей. В дальнейшем я находила интересные задания то в одной статье то в другой. И всё прикладывала в копилочку. Те задания которые представлены в работе это неполный перечень того что у меня имеется.

Задания для 6 класса

Знакомимся с модулем в шестом классе. Ввожу определение модуля любого числа. Обычно учащиеся выполняют вычисления вида | -6 | + | - 1,7 | - | 6 | или сравнения чисел: | - 78 | и | - 3 |; | -8.3 | и 2.4; | -4,8 + 0,2 | и |- 7,8 | + 0,2.

После, планируются в следующей теме «Решение уравнений» рассмотреть простейшие уравнения, содержащие модуль, предлагаю учащимся один из способов решения уравнений. Добиваюсь сознательного подхода к определению «модуль», чтобы в дальнейшем углублять и расширять эту тему в каждом классе.

В 6-ом классе предлагаю уравнения вида | 2x - 3 | = 5

Решение: 2x – 3 = - 5, или 2x - 3 = 5,

2x = - 2, 2x = 8,

x = -1; x = 4.

Не забываем рассмотреть частный случай | 4x -2 | = 0, и уравнение, которое не имеет корней, | 7x – 1 | = - 3.

Закрепляем три случая, когда уравнение имеет два корня, один корень или когда уравнение корней не имеет. Для отработки можно предлагаю упражнения:

1. | 5 - 4x | = 1,
2. | 5x - 3 | = 4,
3. | 3x - 3 | = - 2,
4. | 8x - 3 | = 21,
5. | x - 5x | = 0,
6. | 2 - 30x | = 28,
7. | 1.2x - 3 | = - 1.5 + 3,
8. | - 4.5x + 1.2 - 2.5x | = 8,

Ответы:
1. 1 и 1,5
2. 1,4 и – 0,2
3. Корней нет
4. 3 и – 2,25
5. 0
6. 1 и $-\frac{13}{15}$
7. $2\frac{11}{12}$ *и* $2\frac{1}{12}$
8. $-\frac{34}{35}$ *и* $1\frac{1}{35}$

Все уравнения рассматриваю с комментариями, обращаю внимание на детали, которые встречаются при решении.

Для контроля знаний провожу самостоятельную работу на два варианта. Время работы 10 минут.

Вариант –1

| 8x - 1 | = 7,
| - 4x + 2x – 1.2x | = 4,
| 3 - 5.1x | = 0,
| 1 - 1.1x | = - 3.

Вариант – 2

| 4x + 3 | = 11,
| - 1.1x + 3 – 4.4x | = 8,
| 7 - 2.1x | = 0,
| 3 - 1.2x | = - 2.

Ответы: 1 вариант
1. 1 и -0,75
2. 1,25 и -1,25
3. $\frac{10}{17}$
4. Решений нет

Ответы: 2 вариант
1. 2 и -3,5
2. 2 и $-\frac{10}{11}$
3. $3\frac{1}{3}$
4. Решений нет

Включаю в контрольную работу по теме «Решение уравнений» задание, содержащее модуль, как обязательный пункт. При итоговом повторении материала шестого класса также включаю в повторение решение уравнений, содержащих модуль, а также задания вычислительного характера и задания для сравнения. Можно провести самостоятельные работы по теме «Модуль», предложив 4 варианта.

Самостоятельная работа ***«Модуль числа – 1».***

Вариант 1. С – 48. *1. Найдите модуль числа:* *а)* 8; *б)* $-2{,}8$; *в)* $9{,}2$; *г)* $-4\frac{1}{3}$. *2. Запишите числа, модули которых равны:* *а)* 7; *б)* $3{,}1$; *в)* $7\frac{2}{9}$; *г)* $13\frac{8}{11}$.	***Вариант 2. С – 48.*** *1. Найдите модуль числа:* *а)* -9; *б)* $7{,}1$; *в)* $1\frac{9}{11}$; *г)* $-13{,}25$. *2. Запишите числа, модули которых равны:* *а)* $11{,}7$; *б)* $3\frac{1}{9}$; *в)* 27; *г)* $\frac{16}{25}$.
Вариант 3. С – 48. *1. Найдите модуль числа:* *а)* $13\frac{7}{13}$; *б)* $-8{,}2$ *в)* $-1\frac{8}{9}$; *г)* $2{,}815$ *2. Запишите числа, модули которых равны:* *а)* $7{,}3$; *б)* $1\frac{3}{7}$; *в)* $11{,}91$; *г)* $\frac{15}{29}$	***Вариант 4. С – 48.*** *1. Найдите модуль числа:* *а)* -6; *б)* $17\frac{2}{3}$; *г)* $-4\frac{8}{13}$; *д)* $22{,}17$ *2. Запишите числа, модули которых равны:* *а)* $12\frac{3}{7}$; *б)* $8{,}3$; *в)* 32; *г)* $\frac{113}{247}$

Самостоятельная работа ***«Модуль числа – 2***

Вариант 1. С – 49. *Найдите значение выражения:* *а)* $\lvert 1{,}7\rvert + \lvert -1{,}8\rvert =$ *г)* $\lvert -3{,}7\rvert \cdot \lvert 4{,}2\rvert =$ *б)* $\left\lvert -\frac{3}{7}\right\rvert + \left\lvert -\frac{1}{14}\right\rvert =$ *д)* $\left\lvert -\frac{5}{9}\right\rvert \cdot \left\lvert \frac{3}{5}\right\rvert =$ *в)* $\lvert -2{,}9\rvert - \lvert -0{,}9\rvert =$ *е)* $\lvert 7{,}2\rvert : \lvert -0{,}6\rvert =$	***Вариант 2. С – 49.*** *Найдите значение выражения:* *а)* $\lvert -8{,}3\rvert + \lvert -2{,}9\rvert =$ *г)* $\lvert -8{,}4\rvert \cdot \lvert -1{,}5\rvert =$ *б)* $\lvert -5{,}75\rvert - \lvert 2{,}38\rvert =$ *д)* $\lvert -2{,}73\rvert : \lvert 1{,}3\rvert =$ *в)* $\left\lvert \frac{5}{9}\right\rvert - \left\lvert -\frac{1}{6}\right\rvert =$ *е)* $\left\lvert -1\frac{1}{7}\right\rvert : \left\lvert \frac{4}{7}\right\rvert =$
Вариант 3. С – 49. *Найдите значение выражения:* *а)* $\lvert 7{,}6\rvert + \lvert -4{,}7\rvert =$ *г)* $\lvert -7{,}14\rvert : \lvert 2{,}1\rvert =$ *б)* $\lvert -3{,}84\rvert - \lvert 1{,}97\rvert =$ *д)* $\lvert -7{,}5\rvert \cdot \lvert -4{,}6\rvert =$ *в)* $\left\lvert -1\frac{1}{7}\right\rvert + \left\lvert 1\frac{3}{14}\right\rvert =$ *е)* $\left\lvert 1\frac{1}{5}\right\rvert \cdot \left\lvert -\frac{5}{12}\right\rvert =$	***Вариант 4. С – 49.*** *Найдите значение выражения:* *а)* $\lvert -4{,}8\rvert + \lvert 5{,}2\rvert =$ *г)* $\lvert -5{,}21\rvert - \lvert -4{,}8\rvert =$ *б)* $\left\lvert -3\frac{1}{3}\right\rvert - \left\lvert -\frac{5}{6}\right\rvert =$ *д)* $\left\lvert 2\frac{1}{12}\right\rvert : \left\lvert -1\frac{1}{24}\right\rvert =$ *в)* $\lvert -6{,}5\rvert : \lvert 3{,}9\rvert =$ *е)* $\lvert 26{,}5\rvert \cdot \lvert 3{,}9\rvert =$

Задания для 7 класса

В 7 классе повторяя материал в вычислительных примерах включаю задания с модулем, тем самым, усложняю примеры. Вычислить: $3{,}4 - 5{,}71 - \lvert 6{,}1 - 18{,}4 \rvert$.

Так же предлагаю задания вида:

1) $\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$; верно ли, что $a = b$?
2) $\lvert x \rvert < \lvert y \rvert$; верно ли, что $x < y$?
3) $\lvert x \rvert > \lvert y \rvert$; верно ли, что $x > y$?

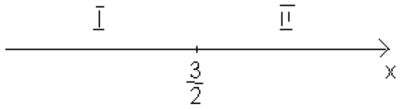
В одной из первых тем 7-го класса — «Уравнение с одной переменной» предлагаю решение уравнений, содержащих модуль. В процессе решения знакомлю учащихся с ещё одним способом решения. Чаще всего это делаю на факультативных занятиях.

Пример 1 Решите уравнение $\lvert 2x - 3 \rvert = 9 - 4x$

Решение

1. $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$. Точка $\frac{3}{2}$ разбивает числовую ось на два промежутка эту точку называем «узловой»

2. Предлагаю сделать рисунок (учащиеся еще не знают символы $+\infty$ и $-\infty$), промежутки можно показать на рисунке



3. Проверим знак выражения $2x - 3$ на I промежутке. Для этого берем любое число из первого промежутка и подставляем вместо x. Например, $x = 1$, $2 \cdot 1 - 3 < 0$, поэтому

$|2x - 3| = -(2x - 3)$,

и исходное уравнение примет вид

$-(2x - 3) = 9 - 4x$,

$-2x + 3 = 9 - 4x$,

$2x = 6$,

$x = 3$.

Число 3 не принадлежит I промежутку, значит, не является корнем исходного уравнения.

Проверим знак выражения $2x - 3$ на II промежутке.

Для этого возьмем $x = 2$, $2 \cdot 2 - 3 > 0$.

Значит, $|2x - 3| = 2x - 3$, и исходное уравнение примет вид $2x + 4x = 9 = 3$, $x = 2$. $x = 2$ принадлежит II промежутку, поэтому является решением исходного уравнения. Ответ: 2.

Обязательно рассматриваю аналогичные уравнения, которые имеют два корня или не имеют корней.

<u>АЛГОРИТМ</u>

1. Отметить все нули выражений стоящих под знаком модуля, на числовой прямой. Они разобьют числовую прямую на промежутки, в которых все выражения стоящие под знаком модуля имеют постоянный знак.

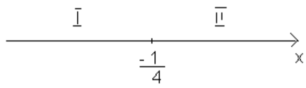
2. Из каждого промежутка берем произвольное число и определяем знак выражения стоящего под знаком модуля, по этому знаку снимаем знак модуля.

Если $a < 0$, *то* $|a| = -a$, если $a > 0$, *то* $|a| = a$,

3. Решаем полученные уравнения и выбираем решения, принадлежащие данному промежутку

<u>Пример 2</u> Решите уравнение $|4x + 1| = 2x + 7$

Решение



1. $4x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{4}$

2. $\mathbf{x = -1;}$ $\mathbf{4(-1) + 1 < 0,\ |4x + 1| = -(4x + 1)}$

$-(4x + 1) = 2x + 7$,

$-4x - 1 = 2x + 7$,

$-6x = 8$,

$x_1 = -1\frac{1}{3}$ принадлежит первому промежутку

3. $\mathbf{x = 2;}$ $4 \cdot 2 \mathbf{+ 1 > 0,\ |4x + 1| = 4x + 1}$

$4x + 1 = 2x + 7$,

$2x = 6$,

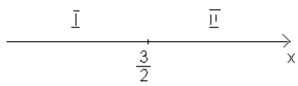
$x = 3$,

$x_2 = 3$ принадлежит второму промежутку

Ответ: $-1\frac{1}{3}$ и 3

<u>Пример 3</u> Решите уравнение $|2x - 3| = x - 2$

Решение



1. $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$

2. $\mathbf{x = 1;}$ $2 \cdot 1 \mathbf{- 3 < 0,}$ $\mathbf{| 2x - 3 | = -(2x-3)}$

$-(2x - 3) = x - 2$,

$-2x + 3 = x - 2$,

$-3x = -5$,

$x = \frac{5}{3}$

$x = 1\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3} \notin$ I, следовательно, $1\frac{2}{3}$ не является корнем исходного уравнения

3. $\mathbf{x = 2;}$ $2 \cdot 2 \mathbf{- 3 > 0,}$ $\mathbf{| 2x - 3 | = 2x-3}$

$2x - 3 = x - 2$,

$x = 1$, $1 \notin$ II, следовательно, 1 не является корнем исходного уравнения

Ответ: уравнение корней не имеет.

Продолжая решать на факультативных занятиях, закрепляю уравнениями другого вида, добиваюсь усвоения алгоритма. Предлагаю следующие уравнения:

1. $| 1 - 2x | = x$;
2. $2x - 1 = | 4 - x |$;
3. $x - 2| x - 1 | = 0$;
4. $5| 2x + 2 | - x + 2 = 0$;
5. $x + | 3x + 1 | = 4 + 2{,}5x$;
6. $3| 2x + 1| = 7x + 2$;
7. $x - 2 = 5| x + 1 |$;
8. $| x | - 3 = 2x + 4$;
9. $12 - | x | = 5 + 3x$.

Ответы:

1. 1 и $\frac{1}{3}$
2. $1\frac{2}{3}$
3. 2 и $\frac{2}{3}$
4. Решений нет
5. 2 и $-1\frac{1}{9}$
6. 1
7. Решений нет
8. $-2\frac{1}{3}$
9. 1,75

Для самостоятельной работы дома предлагаю следующие уравнения:

1. $| 3 - 3x | = x + 5$;
2. $3x - 2| x | = 4$;
3. $| 7x + 1 | = 2x - 6$;
4. $| 6x - 24| = x + 1$;
5. $| 2 - 2x | = 3 + x$;
6. $10x - 3| x | = 7$.

Ответы:

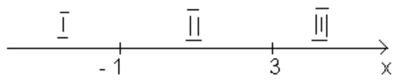
1. $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 4$
2. $x = 4$
3. нет решений
4. $x = 5$
5. $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{1}{3}$
6. $x = 1$

Проанализировав самостоятельную работу учащихся, углубляю тему, проводя рассуждения по предложенной схеме.

__Пример:__ Решите уравнение $| 3 - x | - | 2x + 2 | = 3$

1. $3 - x = 0$, $x = 3$; $2x + 2 = 0$, $x = -1$.

2. выберем $x = -2$,



$3 - (-2) > 0$, $2(-2) + 2 < 0$

$| 3 - x | = 3 - x$, $| 2x + 2 | = -(2x+2)$

Исходное уравнение принимает вид

$3 - x + 2x + 2 = 3$,

$x = -2$, $-2 \in$ I, т.е. $x_1 = -2$

3. выберем $x = 0$, $3 - 0 > 0$, $2(0) + 2 > 0$

$| 3 - x | = 3 - x$, $| 2x + 2 | = 2x+2$

Исходное уравнение принимает вид

$-3 - x - 2x - 2 = 3$,

$3x = 2$,

$x = -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3} \in$ II, т.е. $x_2 = -\frac{2}{3}$

4. выберем $x = 4$, $3 - 4 < 0$, $2(4) + 2 > 0$

$| 3 - x | = -(3 - x)$, $| 2x + 2 | = 2x+2$

Исходное уравнение принимает вид

$- 3 + x - 2x - 2 = 3$,

$- x = 3 + 5$,

$x = - 8$, $- 8 \notin III$ Ответ: $- 2; - \frac{2}{3}$

Решать в 7-ом классе более сложные уравнения, в которых три и более модулей, не нужно.

Во время факультативных занятий предлагаю следующий набор уравнений:

1. $| 3x - 1 | = | 2x + 3 |$,
2. $2| 4 - x | + | x - 2 | = 7$,
3. $| x | - | 8x - 5 | = 1$,
4. $2| x - 7 | = | x + 9 |$,
5. $4| x + 3 | = | 2x - 1 |$,
6. $| x - 2 | = 3| x + 3 |$.

Ответы:

1. -0,4 и 4
2. 1 и $5\frac{2}{3}$
3. Решений нет
4. 23 и $1\frac{2}{3}$
5. -6,5 и $-1\frac{5}{6}$
6. -5,5 и -1,75

Для домашней работы предлагаю упражнения:

1. $3| x + 5 | + | x - 1 | = 2$,
2. $| x - 2 | + 2| x + 1 | = 4$,
3. $| 2x + 1 | - | x + 4 | = - 3$,
4. $| 3x - 1 | - | x + 5 | = 2$.

Ответы:

1. Решений нет
2. 0 и $-1\frac{1}{3}$
3. 0 и $-\frac{2}{3}$
4. -1,5 и 4

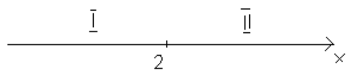
При изучении темы «Линейная функция и ее график» в 7-ом классе, возвращаюсь к понятию модуля. На уроках подробно изучаем и закрепляем данную тему. А на факультативных занятиях рассматриваем функцию $y = | x |$ и строим ее график.

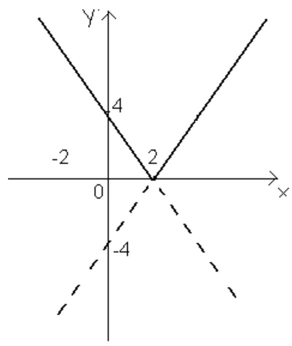
Далее строим графики: $y = | x | + 3$, $y = | x - 1 |$, $y = 4 - | x |$, $y = | 1 - 2x |$

Идею построения этих графиков аналогична идеи решения уравнений, содержащих модуль.

Рассмотрим более подробно на примере: построить график функции $y = | 2x - 4 |$

1. $2x – 4 = 0$, $x = 2$





2. $x = 1$, $2\cdot 1 - 4 < 0$, $| 2x - 4 | = -(2x - 4)$, $y = - 2x + 4$ $x = 3$, $2\cdot 4 - 4 > 0$ $| 2x - 4 | = 2x - 4$, $y = 2x – 4$

Построив график $y = - 2x + 4$, выделяем ту его часть, которая принадлежит правому промежутку. Получим часть исходного графика. Построив график $y = 2x – 4$, выделяем ту его часть, которая принадлежит II промежутку. Ломанная, которая расположена в верхней полуплоскости и является графиком исходной функции $y = | 2x – 4 |$.

Рассказав учащимся этот способ, обращаю их внимание на смысл модуля, показываю, что этот график, полностью находясь в верхней полуплоскости, еще раз подчеркиваю определение модуля.

Таким образом, к 8-му классу, когда учащиеся начнут изучать квадратный корень предлагаю задания с модулем, и учащиеся готовы к восприятию этого материала.

Отрабатываем построение графиков на следующих примерах:

1. $y = | x | + | x + 2 |$,
2. $y = | x + 4 | + | x + 2 |$,
3. $y = - 3 | x |$,

4. y = | x - 1 | - | x + 2 |,
5. y = 3 | x |,
6. y = 2 + | x - 3 |,
7. y = | 2 x - 1 | + 4,
8. y = | 1 - x |,
9. y = | 2x + 3 |.

Задания для 8 класса

В 8 классе при изучении темы «Квадратные корни», учащиеся вновь встречаются с понятием модуля. Опираясь на свойство $\sqrt{a^2} = |\ a\ |$ при любом значении *a*, предлагаю следующие задания.

Вычислить $\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

Решение: $\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}=$

$\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=|\sqrt{3}-\sqrt{2}|-|\sqrt{3}+\sqrt{2}|=-2\sqrt{2}$

Отработать примеры такого рода можно при выполнении следующих заданий:

1. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$,	Ответ: 4
2. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$,	Ответ: 6
3. $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$,	Ответ: 2
4. $\sqrt{28-10\sqrt{3}}-\sqrt{28+10\sqrt{3}}$,	Ответ: 10
5. $\sqrt{\lvert 2\sqrt{3}-21\rvert}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}$,	Ответ: 30
6. $\sqrt{18+8\sqrt{3}}-\sqrt{\lvert 8\sqrt{2}-18\rvert}$.	Ответ: - 14 + 12$\sqrt{2}$

В математическом классе или на индивидуальных консультациях уделяю достаточно много времени построению графиков вида: y = $\sqrt{x^2+2x+1}$, y = $\sqrt{(x+1)^2}$, т.е. y = | x + 1 |.

С построением таких графиков учащиеся знакомились на факультативных занятиях в 7-ом классе, поэтому здесь модуль, построение графика и определение арифметического квадратного корня можно связать при решении следующих упражнений:

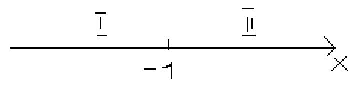
1. y = $\sqrt{x^2-6x+9}$, ,
2. y =$\sqrt{x^2+4x+4}$, ,
3. y = $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$,
4. y = $\sqrt{4x^2-8x+4}-\sqrt{x^2+6x+9}$, , ,
5. y =$1-\sqrt{9+6x+x^2}$,
6. y = 2 - $\sqrt{x^2-4x+4}$.

В 8-ом классе углубление по теме «Модуль» продолжаю при изучении квадратных уравнений. Изучив и отработав все формулы для нахождения корней квадратных уравнений предлагаю следующие задания. Последовательно повторяя ранее изученный способ, углубляя его, так как в предлагаемых примерах переменная встречается и под знаком модуля и без него.

Решите уравнения 1 – 5.

1. x^2 - 7 | x | + 6 = 0,	Ответ: 1 и 6
2. x^2 - 4| x | - 21 = 0,	Ответ: 7 и - 7
3. (x - 2)^2 - 8 | x – 2 | + 15 = 0,	Ответ: -1, -3, 5 и 7
4. x^2 +2x + 2 | x + 1 | = 7,	Ответ: -3 и 1
5. 4x^2 - 12x - 5 | 2x - 3 | + 15 = 0.	Ответ: 0 и 0,5

Рассмотрим подробно пример № 4 $x^2 + 2x + 2\,|\,x + 1\,| = 7$



1. Выражение под знаком модуля равно нулю при $x = -1$

2. $x = -3$, $-3 + 1 < 0$, $x^2 + 2x + 2(-x - 1) = 7$,
$x^2 + 2x - 2x - 2 - 7 = 0$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$, $3 \notin I$, $-3 \in I$,
$x = -3$ — корень

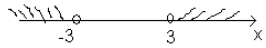
3. $x = 2$, $2 + 1 > 0$, $x^2 + 2x + 2(x + 1) = 7$, $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_1 \notin II$, $x_2 \in II$, $x = 1$ — корень

Ответ: -3; 1

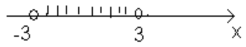
В контрольную работу по теме «Квадратные уравнения» включаю уравнения, содержащие модуль. Для закрепления провожу небольшую самостоятельную работу, в которую включаю только уравнения с модулем.

Таким образом, в 8-ом классе учащиеся уже умеют решать уравнения, содержащие модуль, и можно перейти к решению неравенств, содержащих модуль. Для начала предлагаю простые неравенства вида $|x| < a$, $|x| > a$, где $a > 0$.

1. $|x| > 3$.



2. $|x| < 3$.



На конкретных примерах закрепляем решение неравенств такого вида.

1. $|x + 1| > 3$, $x + 1 > 3$, $x > 2$, $(2; +\infty)$;
$x + 1 < -3$, $x < -4$, $(-\infty; -4)$.
Ответ: $(-\infty; -4)$ и $(2; +\infty)$

3. $|x - 1| < 3$,

$\begin{cases} x - 1 < 3 \\ x - 1 > -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4 \\ x > -2 \end{cases}$ $-2 < x < 4$

2-ой способ решения:
$|x - 1| < 3$, $-3 < x - 1 < 3$, $-2 < x < 4$.

Обращаю внимание учащихся на то, в каком случае составляется система, а в каком совокупность неравенств. Отрабатываем решение неравенств такого вида решая неравенства вида:

1. $\vert 0{,}5 - x\vert < 3$,	Ответ: (-2,5;3.5)
2. $\vert 2 - 4x\vert > 7$,	Ответ: (-∞; -1,25) и (2,25: +∞)
3. $\vert 4 + 2x\vert > 5$,	Ответ: (-∞; -4,5) и (0,5: +∞)
4. $\vert 1{,}5 - 3x\vert > 3$,	Ответ: (-∞; -0,5) и (1,5: +∞)
5. $\vert 2x - 5\vert < 4$,	Ответ: (-0,5;4,5)
6. $\vert 5 - 0{,}5x\vert > 1$,	Ответ: (-∞;8) и (12: +∞)
7. $\vert 3 - 2x\vert < 4$,	Ответ: (-0,5;3,5)
8. $\vert 1{,}5 - x\vert > 0$.	Ответ: (-∞; 1,5) и (1,5: +∞)

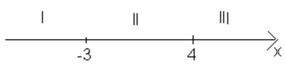
После решения таких заданий перехожу к решению более сложных неравенств.

<u>Пример.</u>

Решить неравенство $|2x + 6| + |x - 4| > 10$

Решение

Выражения под знаком модуля равны нулю при $2x + 6 = 0$,
$x = -3$, $x - 4 = 0$, $x = 4$



Рассматривая исходное неравенство, на каждом из данных промежутков получим три системы:

I. $\begin{cases} x \le -3 \\ -2x + 6 - x + 4 > 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le -3 \\ -3x > 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le -3 \\ x < -4 \end{cases}$ $x < -4$

т.е. решением этой системы является промежуток (- ∞; - 4)

II. $\begin{cases} -3 < x \le 4 \\ 2x + 6 - x + 4 > 10 \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x \le 4, \\ x < 0 \end{cases}$ $0 < x \le 4,$

т.е. решением этой системы является промежуток (0; 4].

III. $\begin{cases} x > 4 \\ 2x + 6 + x - 4 > 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4 \\ 3x > 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4 \\ x > 2\frac{2}{3} \end{cases}$ $x > 4$

т.е. решением этой системы является промежуток (4 ; + ∞)
Объединяя найденные решения, получим $x < -4$; $x > 0$.
Ответ: (- ∞; - 4) и (0 ; + ∞)

Для закрепление решаем примеры:

1. $\mid 1 - 2x \mid > 3 - x$,	Ответ: (-∞;-2) и ($\frac{4}{3}$: +∞)
2. $\mid x + 8 \mid < 3x - 1$,	Ответ: (-∞;4,5)
3. $\mid 2x - 3 \mid \ge 2x - 3$,	Ответ: x- любое число
4. $\mid 4 - 3x \mid \ge 2 - x$,	Ответ: (-∞; 1) и (1,5: +∞)
5. $\mid 3x + 1 \mid \le 3x + 1$,	Ответ: ($-\frac{1}{3}$: +∞)
6. $\mid 2x - 5 \mid < \mid 4x + 1 \mid$,	Ответ: (-∞;-3) и ($\frac{2}{3}$: +∞)
7. $\mid 1 - 3x \mid \ge \mid 2x + 3 \mid$,	Ответ: (-∞;-0,4] и [4: +∞)
8. $\mid x \mid + \mid x - 1 \mid < 5$,	Ответ: (-2;3)
9. $\mid x - 2 \mid - \mid 2x + 1 \mid < 3$,	Ответ: (-∞;-0.5] и ($\frac{2}{3}$: +∞)
10. $\mid x - 1 \mid + \mid 2 - x \mid > 3x + 3$.	Ответ: (-∞; 0)

В этой же теме предлагаю решение систем неравенств.

1. $\begin{cases} \mid x - 1 \mid \le 2, \\ \mid x - 4 \mid \ge 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \mid 2x - 5 \mid < 3 \\ \mid 3x - 1 \mid \le 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2x - 1 \\ \mid x - 1 \mid + \mid x - 2 \mid < 3 - x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x - 3 < x - 6 \\ 3 - 2x > x - 4 \\ \mid x - 7 \mid < 1. \end{cases}$

В итоговую работу за 8-ой класс включаю неравенство или систему неравенств, содержащие модуль.

В теме «Квадратичная функция» после изучения схемы построения параболы, на факультативных занятиях рассматриваю следующие примеры.

1. $y = \mid x^2 - 6x + 3 \mid$,
2. $y = x^2 - 6 \mid x \mid + 3$,
3. $y = \mid x^2 - 6x + 3 \mid + 3$,
4. $y = x \mid x - 6 \mid + 3$,
5. $y = \mid x^2 - 5x \mid + x - 3$,
6. $y = \mid x^2 - 4 \mid - 2x$.

Рассмотрим более подробно решение некоторых примеров.

Пример 1 $y = \mid x^2 - 6x + 3 \mid$

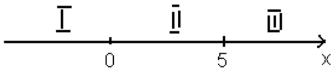
Здесь можно использовать принцип «зеркального отражения». Строим параболу $y = x^2 - 6x + 3$ по всем правилам:

$X_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$, $y_0 = 9 - 18 + 3 = -6$, A (3; - 6) — вершина параболы, ветви направлены вверх. Строим параболу и отображаем часть графика, расположенного ниже оси Ox, в верхнюю полуплоскость.

Пример 5 $y = \mid x^2 - 5x \mid + x - 3$

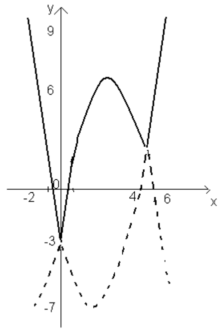
1. $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$, $x = 0$ или $x = 5$

$x = 0$ или $x = 5$ разбивают числовую ось на три промежутка



2. x = - 1, $(-1)^2 - 5(-1) > 0$,

$y = x^2 - 5x + x - 3$, $y = x^2 - 4x - 3$



Строим параболу $y = x^2 - 4x - 3$ и выделяем ту ее часть, которая находится на промежутке $(-\infty; 0]$

3. x = 1, $1^2 - 5\cdot 1 < 0$,

$y = -x^2 + 5x + x - 3$, $y = -x^2 + 6x - 3$

Строим эту параболу и выделяем ту ее часть , которая находиться на промежутке [0 ; 5]

4. x = 6, $6^2 - 5(6) > 0$, $y = x^2 - 4x - 3$. эту параболу уже строили, поэтому выделим ту ее часть, которая находиться на промежутке $[5; +\infty]$

Выделенные части являются графиком функции

$y = |x^2 - 5x| + x - 3$

На факультативных занятиях рассматриваю построение графиков 1 – 2.

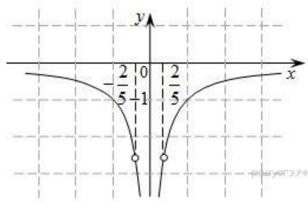
1. $|y| = x^2 - 6x + 8$; 2. $|y| = x^2 - 4|x| + 3$

Также решаем уравнения и неравенства 1 – 6.

1. $x^2 + 2|x - 1| - 2 = 0$;
2. $\frac{x|x|-1}{|x-2|} = -\frac{2}{3}$;
3. $|x - 5|(x - 7) < 0$:
4. $\frac{|x+2|-3}{|x|-1} = 3$;
5. $|x - 2|(x - 2) \ge 0$;
6. $\frac{|x^2-9|}{2x-5} \ge 0$

Задания для 9-го класса

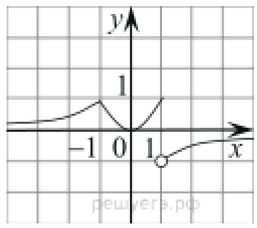
В 9-ом классе особое внимание уделяю заданию 23 из ОГЭ с сайта ФИПИ.



1. Постройте график функции $y = \frac{2.5|x|-1}{|x|-2.5x^2}$. Определите, при каких значениях *k* прямая *y* = *kx* не имеет с графиком общих точек.

Ответ: −6,25; 0; 6,25.

2. Задание 23 № 75

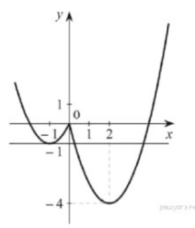


Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } |x| \le 1 \\ -\frac{1}{x}, \text{ если } |x| > 1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

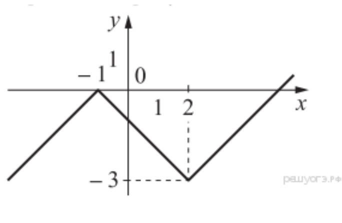
3. Задание 23 № 311583



Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.

Ответ: график функции изображён на рисунке; прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки при $c = 0$ и при $c = -1$.

4. Задание 23 № 311610



Постройте график функции

y = |x-2| - |x+1| + x - 2 и найдите значения m , при которых прямая

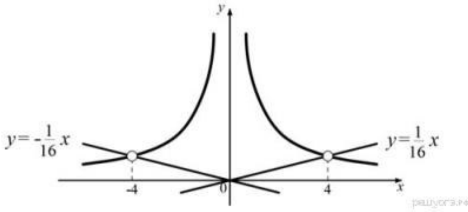
y = m имеет с ним ровно две общие точки.

Ответ: . m = - 3, m = 0

5. Задание 23 № 311662

Постройте график функции $y = \frac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая y = kx не будет иметь с построенным графиком ни

Ответ: 0, $-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}$.



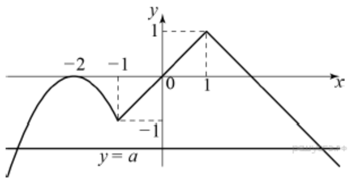
6. Задание 23 № 311923

Постройте график функции

$$\begin{cases} -x^2-4x-4, \text{если } x < -1 \\ 1-|x-1|, \text{если } x \geq -1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях параметра *a* он имеет ровно две общие точки с прямой $y = a$.

Ответ: $a < -1$, $0 < a < 1$.



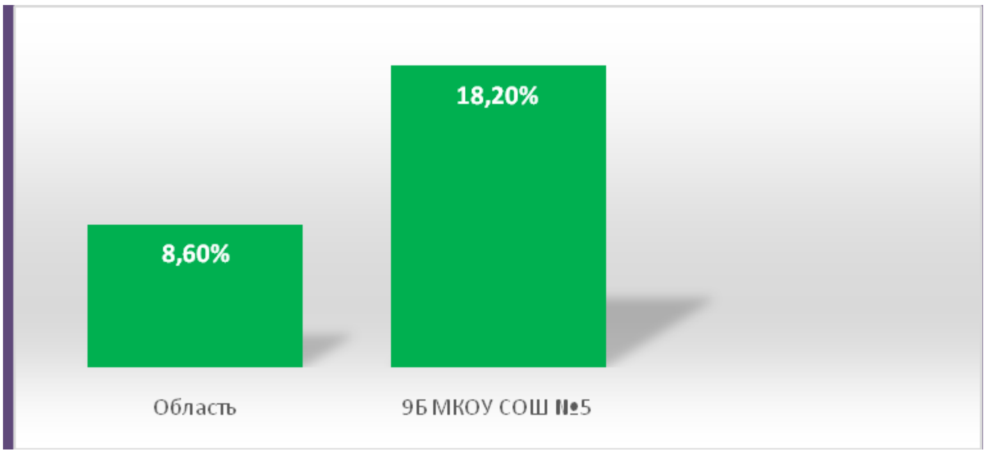
Применение данного метода позволило достичь высоких результатов обучающихся на ОГЭ в 2017 году.

Процент участников ОГЭ, набравших максимальный балл по заданию 23 в 2017 году.

Постройте график функции $y = \frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$. Определите, при каких значениях *k* прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

Создание четко отлаженной системы работы, позволило обучающимся не только научиться решать задания по теме «Модуль», но и значительно повысить мотивацию к изучению математики.

Процент участников ОГЭ, набравших максимальный балл по заданию 23 в 2017 году



Предмет Математика профильная				
Учебный год	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021
Количество обучающихся	36	29	33	33
Количество участников ГИА	16	12	14	15
Успеваемость	100%	100%	93%	100%
Средний балл	44,8	59,8	49,1	56,6

Средний балл по м/о		52,6	42,7	
*Средний балл по Иркутской области	44,6	48,8	45,7	46,2

Предмет Математика базовая			
Учебный год	2017-2018	2018-2019	2019-2020
Количество обучающихся	36	29	-
Количество участников ГИА	20	16	-
Успеваемость	100%	100%	
Качество	72,22%	81,25%	
Средний балл	4,1	4	
*Средний балл по Иркутской области	4,3	3,8	

К сожалению последние три года я веду 10-11 классы. До 9 классы был другой учитель. В связи с чем результатов ОГЭ нет. Поэтому данный курс приходится проходить в ускоренном темпе на дополнительных занятиях.

Естественно время на это выкроить достаточно сложно. И занимаюсь я этим не только на дополнительных занятиях. А также в последнее время широко используют социальные сети. WhatsApp ВКонтакте. А где создаю группы и отправляю туда ссылки на интересующие меня материалы, записывай видео с объяснениями и скидываю задание. Что непонятно разбираем в группе, а уж затем на занятиях в школе. Или при организации дифференциальных занятий на уроке.

Литература:

[1] Газета «Математика» № 36 2002 г.
[2] М.Л. Галицкий. Сборник задач по алгебре
[3] В.Н. Литвиненко. Практикум по элементарной математике
[4] Сборник задач для поступающих во ВТУЗы под редакцией М.И.Сканави
[5] https://math-oge.sdamgia.ru/

Приложение

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Упражнения.

Упростить выражения:

№ 1. $\frac{a^2-4}{|a+2|}$. Ответ: $a-2$ при $a \geq 0$, $-(a+2)$ при $a< 0$.

№ 2. $\frac{a^2-|a|+1-a}{|a-1|}$. Ответ: $\frac{a^2+1}{1-a}$ при $a< 0$, $1-a$ при $0 \leq a< 1$, $a-1$ при $a> 1$.

№ 3. Решить уравнения:

а) $|x-3| = 5$. Ответ: $\{-2; 8\}$.

б) $|x+4| + 1 = 0$. Ответ: решений нет.

в) $|3x+2| - 4 = 0$. Ответ: $\left\{-2; \frac{2}{3}\right\}$.

г) $\left|\frac{3-x}{x-1}\right| = 1$. Ответ: 2.

д) $||2x-5| - 3| = 2$. Ответ: $\{0; 2; 3; 5\}$.

е) $|x^2 - 2x - 1| = 2$. Ответ: $\{-1; 1; 3\}$.

№ 4. Решить уравнения:

а) $|x+5| = 3$. Ответ: $\{-8; -2\}$.

б) $||x-2| - 3| = 1$. Ответ: $\{-2; 0; 4; 6\}$.

в) $|4-3x| - 2 = 0$. Ответ: . $\left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$

г) $||3x+6| + 1| = 5$. Ответ: .$\left\{-\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$

д) $|x^2 + 3x - 4| = 6$. Ответ: $\{-5; 2; -1; -2\}$.

№ 5. Решить уравнения:

а) $|x-2| + |x+3| = 7$. Ответ: $\{-4; 3\}$.

б) $|x-5| - |x-2| = 3$. Ответ: $[2; +\infty)$.

в) $3|x-1| - 2|x-2| + |x+3| = 2$. Ответ: $[-3; 1]$.

г) $|x| + 3|x+2| = 2|x+1|$. Ответ: -2.

№ 6. Решить уравнения:

а) $|2x-3| = 3-2x$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

б) $|4-5x| = 5x-4$. Ответ: $\left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

в) $|3x-5| = 5-3x$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$.

г) $|7-4x| = 7-4x$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$.

№ 7. Решить уравнения:

а) $|5x-13| - |6-5x| = 7$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$.

б) $|3x-8| - |3x-2| = 6$. Ответ: $x \leq \frac{2}{3}$.

в) $|16-9x| - |9x-5| = 11$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{9}\right]$.

г) $|7x-12| - |7x-1| = 1$. Ответ: $\frac{6}{7}$.

№ 8. Решить уравнения:

а) $x^2 - 6|x| - 2 = 0$. Ответ: $3+\sqrt{11}$; $-3-\sqrt{11}$.

б) $x^2 - 4|x| - 1 = 0$. Ответ: $2+\sqrt{5}$; $-2-\sqrt{5}$.

в) $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$. Ответ: 1.

№ 9. Решить уравнения:

а) $|x^3 + 3x^2 + x| = -x + x^3$. Ответ: .$\left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$

б) $|3x - 1| = 4 - 2x$. Ответ: $\{-3; 1)$.

в) $|x^2 - 4| = x^2 - 4$. Ответ: $x \le -2$; $x \ge 2$.

г) $|x + 2| = 2|3 - x|$. Ответ: $\frac{4}{3}$.

д) $|x + 3| = x^2 + x - 6$. Ответ: ± 3.

е) $|x^2 + x - 3| = x$. Ответ: .$\sqrt{3}; 1$

№ 10. Решить уравнения:

а) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 2$. Ответ:-3;$-\frac{1}{3}$.

б) $|x^2 + x + 1| = 1$. Ответ: -1; 0.

в) $\left|\frac{|x-2|}{1-|x-2|}\right|$=3. Ответ: $\frac{1}{2}; 1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}; 3\frac{1}{2}$. .

г) $|x^2 - x - 2| = |2x^2 - x - 1|$. Ответ:$\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$.

д) $|3 - |2 - |1 - x||| = 2$. Ответ: -6; -2; 0; 2; 4; 8.

е) $|3x - 1| + 2x = 4$. Ответ: -3; 1.

ж) $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| = x$. Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

з) $|x^2 - 3x| = x^2 - 2x$. Ответ: $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; 0.

и) $||x| - 2| = 1 - 2x$. Ответ: нет решений.

№ 11. Решить уравнения:

а) $|5 - 3x| = 2x + 1$. Ответ: 0,8; 6.

б) $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$

в) $|2x + 7| - 2|3x - 1| = 4x + 1$. Ответ: 1.

г) $\sqrt{x-2} + |x - 3| = |x - 4|$. Ответ: 3.

д) $\left|\frac{1}{x} - 1\right| + |x - 2| = 1$. Ответ: 1; $1+\sqrt{2}$.

№ 12. Решить уравнения:

1) $|3x^2 + 7x - 3| = 3x^2 + 3x - 1$. Ответ: 0,5; -2; 1/3.

2) $|x^2 - 4x - 1| = x^2 + 6x + 1$. Ответ: 0; $-0{,}2$.

3) $|3x^2 + x - 7| = 3x^2 - 3x - 1$. Ответ: 1,5; -1; $1\frac{1}{3}$.

4)* $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{1+2x+x^2} - \frac{|x-3|}{x-3} = 5$. Ответ: $\{-2; 2\}$.

№ 13. Решить неравенства:

а) $|2x - 6| \le 3$. Ответ: [1,5; 4,5].

б) $|3x - 1| > |2x - 5|$. Ответ: $(-\infty; -4)$ и $(1{,}2; +\infty)$.

в) $|x^2 - 5| \ge 4$. Ответ: $(-\infty; -3)$ и $[-1; 1]$ и $(3; +\infty)$.

г) $|x^2 + x - 3| \le |2x + x - 2|$. Ответ: $(-\infty; -1)$ и $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

№ 14. Решить неравенства:

а) $|3x + 2| + x > 1$. Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

б) $|x-1| \leq 2x+1$. Ответ: $[0; +\infty)$.

в) $|x^2-2| \leq x$. Ответ: $[1; 2]$.

г) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \geq x$. Ответ: $(-\infty; -1)$ и $(1; \sqrt{3}-1)$.

№ 15. Решить неравенства:

а) $|4x-1| + 2x - 4 \leq 0$. Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{6}\right]$.

б) $|3-x| - |x-2| \leq 5$. Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

в) $|2x-6| + |4-x| \leq |x-2|$. Ответ: $[3; 4]$.

г) $|x^2+2x| + |x-2| > 4$. Ответ: $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$.

д) $\sqrt{x^2-3x} \geq |x-4| + |x-3|$. Ответ: $\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{25+\sqrt{37}}{6}\right]$.

№ 16. Решить неравенства:

а) $\frac{1-x^2}{|x-4|-2} \geq 0$. Ответ: $[-1; 1]$ и $[2; 6]$.

б) $\frac{|x-3|-2x}{x-2|x+1|} \leq 0$ Ответ: $(-\infty; 1]$.

в) $\frac{|x^2-x|-|x|}{|x-2|+2x} > 0$ Ответ: $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$.

г) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-5|x|+4} \geq 0$ Ответ: $(-\infty; -4)$ и$[-3; -2]$ и $(-1; 1)$ и $(4; +\infty)$.

д) $(x^2 - |x| - 6)(||x-2|-1|-3) > 0$. Ответ: $(-\infty; -3)$ и $(-2; 3)$ и $(6; +\infty)$.

№ 17. Решить неравенства:

1) $\frac{x^2-4x+3}{|x-1|} > 1$ Ответ: $(-\infty; 1)$ и $(4; +\infty)$.

2) $\frac{x^2-2x-2}{|x-3|} > 1$ Ответ: $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{21}+1}{2}; 3\right)$.

3) $\frac{x^2-8x+3}{|x-1|} > 1$ Ответ: $\left(\frac{9+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right)$ и $\left(-\infty; \frac{7-\sqrt{41}}{2}\right)$.

№ 18. Решить неравенства:

1) $|x^2+9x+5| \leq |3x^2+22x+16|$. Ответ: $(-\infty; -7]$ и $[-5{,}5; -1]$ и $[-\frac{3}{4}; +\infty)$.

2) $|x^2+3x-5| \leq |x^2+7x-9|$. Ответ: $[-2.5-0.5\sqrt{53}; 1]$ и $[-2.5+0.5\sqrt{53}; -\infty)$

3) $|x^2+7x-3| \geq |3x^2+16x-3|$. Ответ: $[-6; -4{,}5]$ и $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

№ 19. Решить неравенства:

1) $\frac{2x^2+3|x|+3}{x^2+1} \geq 1$ Ответ: $(-\infty; -2]$ и $[-1; 1]$ и $[2; +\infty)$.

2) $\frac{2x^2+6x-6|x+2|-9}{x^2+2x+3} \leq 1$ Ответ: $[-10; 6]$.

3) $\frac{2x^2-5x-5|x-3|+17}{x^2+x+2} \leq 1$ Ответ: $[0; 1]$ и $[5; 6]$.

№ 20. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} \frac{|x-1|}{y} = 4x + y + \frac{y-x+1}{4} - 4 \\ y^2 + 2x = 2|x-1| - y + 4 \end{cases}$ Ответ: $(1{,}2; -2)$; $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}; \sqrt{3}\right)$.

2) $\begin{cases} x^2 + 2|y| = 2y - x + 6 \\ xy - |y| = y + 3x \end{cases}$ Ответ: $(-3; 1{,}8)$; $(0; -1{,}5)$.

3) $\begin{cases} \frac{|x|}{y} - y = \frac{y-x}{y} + 4x \\ y^2 + 2x = 2|x| - y + 2 \end{cases}$ Ответ: $(0{,}2; -2)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{4}; \sqrt{3}\right)$.

№ 21. Построить график функции:
1) $y = 4x \cdot |x| + x^2 - 15x$.
2) $y = 2x \cdot |x| + x^2 - 6x$.
3) $y = 3x \cdot |x| + x^2 - 8x$

и найти:

а) область определения и множество значений;
б) промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы;
в) точки пересечения с осями;
г) промежутки знакопостоянства.

Ответ ы:

1. а) Д(y) = R, E(y) = R.
б) возрастает на $(-\infty; -2{,}5]$ и $[1{,}5; +\infty)$ убывает на $[-2{,}5; 1{,}5]$;
точки экстремума –2,5 и 1,5; экстремумы 18,75 и –11,25.
в) $(-5; 0)$; $(3; 0)$; $(0; 0)$.
г) $y > 0$ при $x \in (-5; 0)$ и $(3; +\infty)$,
$y < 0$ при $x \in (-\infty; -5)$ и $(0; 3)$.
2. а) Д(y) = R, E(y) = R.
б) возрастает при $x \in (-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$, убывает при $x \in [-3; 1]$;
точки экстремума –3 и 1; экстремумы 9 и –3.
в) $(-6; 0)$; $(2; 0)$; $(0; 0)$.
г) $y > 0$ при x $(-6; 0)$ и $(2; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; -6)$ и $(0; 2)$.
3. а) Д(y) = R, E(y) = R.
б) возрастает при x $(-\infty; -2]$ и $[1; +\infty)$, убывает при $x \in [-2; 1]$;
точки экстремума –2 и 1; экстремумы 8 и –4.
в) $(-4; 0)$; $(2; 0)$; $(0; 0)$.
г) $y > 0$ при x $(-4; 0)$ и $(2; +\infty)$, $y < 0$ при x $(-\infty; 4)$ и $(0; 2)$.

№ 22. Для каждого значения c укажите число корней уравнения:

а) $4x \cdot |x| - x^2 - 15x = c$;
Ответ: если $c < -11{,}25$ или $c > 18{,}75$, один корень; два корня при $c = -11{,}25$; 18,75, три корня $-11{,}25 < c < 18{,}75$.
б) $2x \cdot |x| + x^2 - 6x = c$;
Ответ: один корень при $c < -3$ и $c > 9$; два корня при $c = -3$; 9; три корня $-3 < c < 9$.
в) $3x \cdot |x| + x^2 - 8x = c$;
Ответ: один корень при $c < -4$ и $c > 8$; два корня при $c = -4$; 8; три корня при $-4 < c < 8$.